

# Calcul informatique de l'homologie de contact legendrienne bilinéarisée

Damien G.

## 1 Nœuds topologiques

Discussion rapide, cela servira juste d'analogie et on y fera parfois référence.

Deux définitions : "piecewise linear" (combinatoires) vs "suffisamment régulier" (analytique, demande un peu plus de technique initialement). Pour les nœuds legendriens on utilisera la présentation avec des courbes suffisamment régulières.

Homotopie et isotopie.

**Définition 1** [ISOTOPIE POUR LES NŒUDS TOPOLOGIQUES]. *Étant donnés deux nœuds  $f_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $f_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , une isotopie entre ces nœuds est une application différentiable*

$$F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

*telle que*

- $F|_{S^1 \times \{i\}} = f_i$  pour  $i = 0, 1$  ;
- $F|_{S^1 \times \{t\}}$  est un plongement pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Techniques d'invariants, topologie algébrique.

Aspect combinatoire, diagrammes et **mouvements de Reidemeister**.

On retrouvera de nouveaux "mouvements de Reidemeister" pour les nœuds legendriens.

## 2 Géométrie de contact et nœuds legendriens

Ce qui suit est une collection de commentaires sur la section 2 de [4], qui décrit le contexte dans lequel on travaillera. Quelques explications provenant de mes explications de début de stage de juillet y ont été incorporées.

Les invariants eux-mêmes seront introduits dans les sections suivantes. L'objet d'intérêt est la "Chekanov-Eliashberg DGA" (voir [4], section 4, page 23).

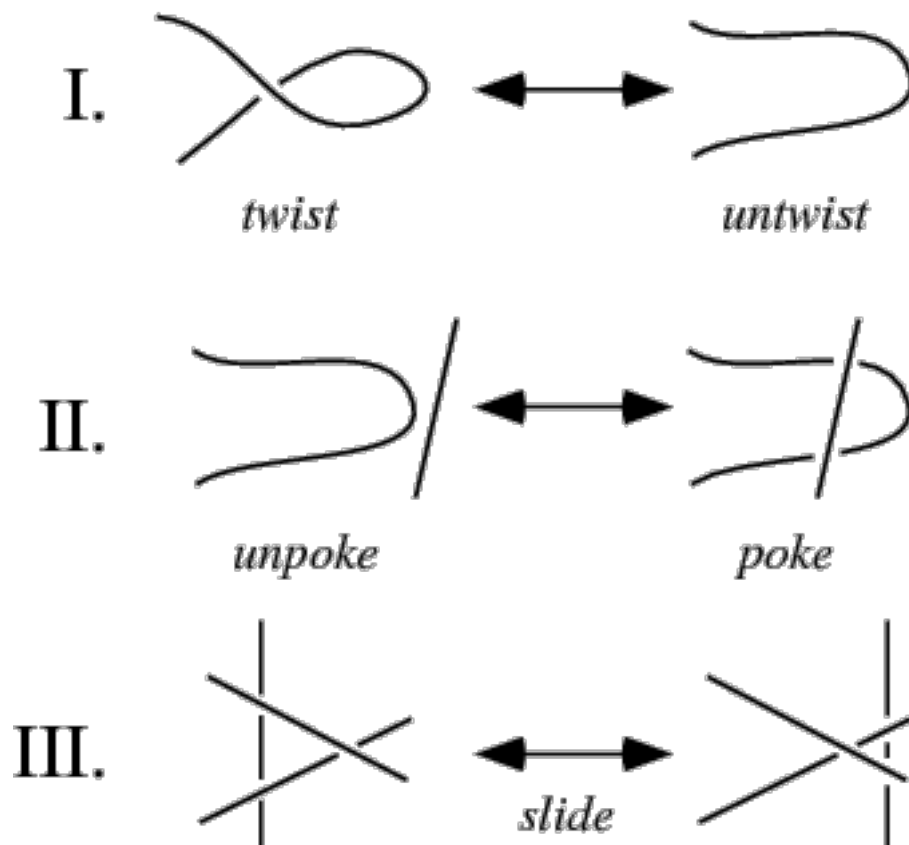
### 2.1 Contexte

Géométrie de contact : "pendant de la géométrie symplectique en dimension impaire".

Pour une motivation des notions introduites, voir par exemple [2]. Voir aussi [5].

Idée : une variété symplectique est l'espace des phases d'un problème de mécanique hamiltonienne, il y a  $n$  coordonnées généralisées  $(q_i)_{i=1, \dots, n}$  et  $n$  moments  $(p_i)_{i=1, \dots, n}$ .

FIGURE 1 – Mouvements de Reidemeister pour les nœuds topologiques

D'après [http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/ReidemeisterMoves\\_1001.gif](http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/ReidemeisterMoves_1001.gif)

Structure de contact standard sur  $\mathbb{R}^3$  : c'est l'exemple à avoir en tête et il est "entièrement représentatif" car, en dimension fixée, toutes les structures de contact sont localement isomorphes (et l'aspect local suffit ici). Cela se retrouve en géométrie symplectique (cf cours de mécanique analytique), et cela diffère de la géométrie riemannienne par exemple (où toutes les variétés riemanniennes de dimension 3 ne sont pas localement isomorphes car il y a, par exemple, une notion de courbure). Voir le théorème de Darboux : [en géométrie symplectique](#) et [son pendant en géométrie de contact](#).

Si on pense en termes de mécanique analytique, on a affaire à une contrainte non-holonome (car dépendant des vitesses), ici non-intégrable car "les plans tournent trop".

La structure de contact est donnée par le champ de plans non-intégrable.

Comme dans [4], nous ne nous intéresserons qu'à la dimension 3 : c'est plus visuel et c'est là que les techniques combinatoires fonctionnent bien. Il y a des généralisations en dimension supérieure mais je ne maîtrise pas bien les techniques impliquées. En ce qui concerne le résultat obtenu en juillet, ces généralisations sont apparemment assez "automatiques" si on a l'habitude de travailler en dimension supérieure.

Dimension 3 : optique dans le plan, l'espace des configurations est  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ , voir [2].

Dimension 5 : optique dans le plan, l'espace des configurations est  $\mathbb{R}^3 \times S^2$ .

Tight vs overtwisted : pas très important en ce qui nous concerne, se concentrer sur  $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$

Important : définition 2.3. [nœuds legendriens]  $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$  est "représentative" pour une théorie locale des nœuds legendriens et (surtout ?) on peut utiliser plusieurs projections qui ramènent l'étude des nœuds à des techniques combinatoires dans le plan.

## 2.2 Projection frontale

Projection frontale, page 6.

$$\Pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, z)$$

Immersion (Wikipédia) : En géométrie différentielle, une immersion est une application différentiable d'une variété différentielle dans une autre, dont la différentielle en tout point est injective. Soient  $V$  et  $W$  deux variétés et  $f$  une application différentiable de  $V$  dans  $W$ . On dit que  $f$  est une immersion si pour tout  $x$  appartenant à  $V$ , le rang de l'application linéaire tangente  $Tf(x)$  est égal à la dimension de  $V$ .

Important : on peut retrouver  $y(\theta)$  à partir de  $x'(\theta)$  et de  $z'(\theta)$ .

Important : en projection frontale (qu'on utilisera beaucoup par la suite), on a affaire à des **cusps**. Ils se retrouveront naturellement dans la partie combinatoire aussi.

Important : on peut (et on va) décrire des nœuds legendriens *à partir* de leur projection frontale.

Les conditions sur le diagramme sont

- (1) Pas de tangence verticale ;
- (2) Les points non-réguliers sont les cusps ;

- (3) À chaque croisement, la pente du brin du haut est plus petite (i.e. plus négative) que celle du brin du bas. Les croisements sont tous du type  $\searrow$ .

Exemple 2.4 : avoir en tête le nœud trivial (unknot) et le trèfle droit (right trefoil), ce sont des exemples récurrents qui servent de "briques de base" à de nombreux raisonnements.

Théorème 2.5 et conversion "en pratique" page 8. On verra qu'il vaut mieux éviter les "zig-zags" pour les exemples (ils font parfois "dégénérer les invariants", TODO check). Voir aussi le théorème d'approximation legendrienne, cf [3].

Important : mouvement de Reidemeister pour les projections frontales, page 9.

## 2.3 Projection lagrangienne

$$\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

On peut retrouver un nœud legendrien à partir de sa projection lagrangienne (à une constante additive "de hauteur" près, mais cela n'a pas d'importance), cf équation (4) page 9.

Conditions pour pouvoir relever une projection lagrangienne en un nœud legendrien, page 10 :

- (1) Le nœud doit se refermer sur lui-même ;
- (2) Le nœud ne doit pas s'autointersecter.

Les conditions comme (2) ne sont en pratique pas grave car on voit qu'on peut toujours modifier légèrement le nœud pour éviter les problèmes comme (2) (ce sont des problèmes "ponctuels"). Noter que souvent lorsqu'on résolvait les problèmes de projection pour les nœuds classiques, on change de direction de projection, alors que pour les nœuds legendriens on change plutôt le nœud (on travaille modulo isotopie legendrienne).

((1)) est une contrainte globale portant sur l'aire algébrique de la projection, voir le [théorème de Green](#).

Les projections lagrangiennes sont un peu moins pratiques que les projections frontales car les conditions pour pouvoir relever un diagramme sont plus dures à interpréter. Elles sont cependant importantes pour des raisonnements théoriques.

Mouvement de Reidemeister pour les projections lagrangiennes, page 10. Attention, on n'a qu'une implication et pas l'équivalence à cause des contraintes intégrales.

On reparlera surtout de la projection lagrangienne en discutant d'une procédure de conversion d'une projection frontale en une projection lagrangienne à la section 4.5.

Section 2.4 (nœuds transverses) : passer.

## 2.4 Classification des nœuds

p12 : discussion sur deux notions d'isotopie : "isotopie à travers des nœuds legendriens" et "isotopie de contact ambiante". Théorème 2.12 : elles coïncident pour classifier les nœuds legendriens (mais la preuve utilise des arguments que je ne connais pas). Ces points sont importants dans les fondements de la théorie mais on n'aura pas à s'en soucier en pratique.

Théorème 2.13 : pas nécessaire.

## 2.5 Invariants classiques des nœuds legendriens

### 2.5.1 Invariants topologiques

Une isotopie legendrienne entre deux nœuds legendriens est en particulier une isotopie topologique des nœuds topologiques sous-jacents, et le type topologique d'un nœud legendrien est invariant par isotopie legendrienne.

Idée importante : on a renforcé les exigences sur les isotopies, donc les classes d'équivalence modulo isotopie sont plus petites : on a "cassé" les classes d'équivalences pour l'isotopie topologique en sous-classes (en fait en une infinité dénombrable de sous-classes, voir les commentaires du théorème 2.17 dans 2.7)

Noter que chaque classe nœud topologique est isotope à un nœud legendrien.

TODO (?) : dessin "avec des patates" avec nœuds topologiques et classes.

### 2.5.2 Invariant de Thurston-Bennequin

Introduit par [Daniel Bennequin](#) dans sa thèse [1] en 1983, c'est le début de la topologie de contact (avec des contributions de [Yakov Eliashberg](#) à la même époque). [William Thurston](#) est surtout connu pour ses contributions à l'étude des variétés de dimension 3.

Intuitivement, mesure la torsion (twisting) de  $\xi$  en tournant autour du nœud.

Discussion plus subtile et un peu périphérique au sujet. Voir page 13, mais des notions que je ne connais pas sont impliquées (surfaces de Seifert, etc.).

TODO : ajouter des explications plus intuitives à partir des notes manuscrites.

### 2.5.3 Rotation number

Pour les nœuds legendriens réalisables comme le bord d'une surface plongée orientable.

On considère des vecteurs tangents au nœud et on projette dans le plan puis on mesure un "winding number" classique, voir page 13.

TODO : ajouter des explications plus intuitives à partir des notes manuscrites.

## 2.6 Calcul des invariants classiques par projection

Périphérique à ce qui nous intéresse, voir page 14.

## 2.7 Stabilisations

Il est facile de faire apparaître des cusps ou des bouclettes, voir page 16. Une telle opération de stabilisation est une isotopie topologique **mais pas** une isotopie legendrienne (TODO check). C'est un comportement qu'on voudra souvent éviter par la suite car de tels représentants ne donneront pas lieu à des comportements intéressants pour les invariants. En fait, la stabilisation

fait "disparaître les augmentations" qui seront d'une grande importance dans la suite, voir plus loin (TODO check + liens).

Un résultat remarquable (mais qu'on n'utilisera pas) est donné par le théorème 2.17 page 16 : si on effectue suffisamment de stabilisations à deux nœuds legendriens topologiquement isotopes, alors ceux-ci deviennent isotopes par isotopie legendrienne. La preuve utilise les mouvements de Reidemeister legendriens.

On peut donc construire facilement des nœuds legendriens avec des invariants de Thurston-Bennequin arbitrairement bas. Il y a par contre une inégalité de Bennequin empêchant les grandes valeurs, voir plus loin. Il n'est donc pas facile de "déstabiliser" un nœud (alors qu'en ce qui nous concerne, on préfère des nœuds sans cusps ou bouclettes inutiles)

Théorème 2.18, sections 2.8 et 2.9 : passer.

## 2.8 Inégalité de Bennequin

C'est le seul point qui nous intéresse dans la section 3 de [4]. C'est périphérique à notre but. TODO : citer la version des feuilles, préciser l'hypothèse qu'on met sur les nœuds.

## 3 Un condensé d'algèbre homologique

### Références

- [1] Daniel BENNEQUIN. « Entrelacements et équations de Pfaff ». fr. In : *IIIe rencontre de géométrie du Schnepfenried (Volume 1) - 10 - 15 mai 1982*. Astérisque 107-108. Société mathématique de France, 1983, p. 87–161. URL : [http://www.numdam.org/item/AST\\_1983\\_\\_107-108\\_\\_87\\_0](http://www.numdam.org/item/AST_1983__107-108__87_0).
- [2] Frédéric BOURGEOIS. « Du patinage et de l'optique à la géométrie de contact ». In : *Bulletin de la Classe des Sciences. Academie Royale de Belgique* (jan. 2013), p. 6. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01011008>.
- [3] Baptiste CHANTRAINE. *Introduction aux courbes legendriennes dans l'espace des éléments de contact du plan*. 2011. URL : <http://bssm.ulb.ac.be/data/books/Bssm-2011-Baptiste-Chantraine.pdf>.
- [4] John B. ETNYRE. « Legendrian and Transversal Knots ». In : *arXiv Mathematics e-prints*, math/0306256 (juin 2003), math/0306256. URL : <https://arxiv.org/abs/math/0306256>.
- [5] Daniel V. MATHEWS. *An introduction to contact geometry and topology*. Oct. 2016. URL : [https://tqft.net/web/conferences/Topology2016/contact\\_geometry.pdf](https://tqft.net/web/conferences/Topology2016/contact_geometry.pdf).